

Six Sigma

Enzo Ferey - enzo.ferey@alumnos.upm.es

Introducción

Six-sigma es un conjunto de técnicas y herramientas para la mejora de procesos. Es una estrategia para incrementar la satisfacción del cliente y ahorrar costes.

En un primer instante se trata de identificar y eliminar las causas de los problemas y a partir de ello intentar eliminar la variabilidad en el producto o servicio obtenido.

Todos los problemas se miden de forma cuantitativa a través de variables controladas (número de trenes) y variables incontroladas (número de averías).

Así, todo output de un proceso viene definido por:

$$\text{OUTPUT} = \text{INPUT} + \text{NOISE}$$

Ciclo (DMAIC)

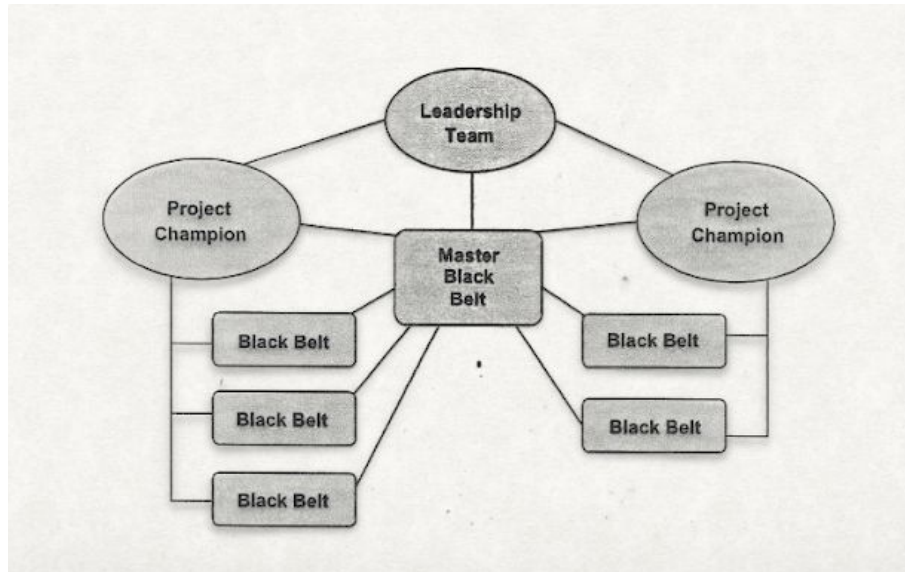
- 1) Definir, project charter y proceso
- 2) Medir, determinación de variables
- 3) Analizar, determinar qué variables permiten explicar los eventos negativos
- 4) Mejorar, una vez conocida la raíz de los problemas se mejoran los resultados
- 5) Controlar, se monitoriza permanentemente el proceso

Prerequisitos

- Apoyo de la alta dirección
- Presupuesto y recursos propios
- Mejoras sustanciales
- Proyectos adecuados
- Gente correcta
- Planificación
- Beneficios sostenibles en el tiempo

Responsabilidades

- Champions: Identifican, promueven y apoyan proyectos six-sigma.
- Master black belt: Coordinan proyectos six-sigma, apoyando a los black belts, entre áreas funcionales.
- Black belts: Llevan a cabo proyectos concretos six-sigma, en su propia área.
- Green belts: Participan en proyectos concretos six-sigma, en su área.



DEFINE

Definición del proceso, scoping, definición y cuantificación de objetivos.

Un **Business Case** es un documento que resume los principales aspectos de una acción comercial y suele utilizarse para justificar una inversión en un proyecto.

Project charter

Especifica límites (proceso, descripción, ámbito), propósito (objetivos, business case, expected savings), activos (personal involucrado, recursos y fechas).

Todo project charter se realiza siguiendo cierta plantilla. Existen muchos temas distintos, nosotros seguiremos el siguiente.

- Cabecera: producto o servicio afectado, personas responsables, ahorro esperado y fechas claves.
- Proceso y descripción del proyecto: aspecto concreto del proceso, problema particular.
- Objetivos: variables utilizadas y cuantificación de la mejora deseada.

- Business case: pretende mostrar a alguien las opciones para alcanzar un objetivo. Indica posibles cursos de acción y sus respectivos beneficios, inconvenientes y riesgos. Permite típicamente la cuantificación de los costes y beneficios, en particular los expected savings.
- Miembros del equipo
- Ámbito del proyecto: determinar los límites del proceso. No se podrá realizar acción alguna fuera de los límites establecidos.
- Beneficios a los clientes internos y externos: identificar y especificar los beneficios que la acción de mejora proporcionará a los distintos stakeholders.
- Fechas
- Apoyo requerido: todos los recursos (materiales, monetarios, personal) que se estimen necesarios para llevar a cabo el proyecto.

Diagrama SIPOC

Usado para definir los procesos de negocio. Los diagramas BPMN tienen mucho mayor poder expresivo pero son más complejos de entender.

En dichos diagramas se diferenciarán los siguientes componentes:

- Supplier
- Input
- Process
- Output
- Customer

SIPOC está orientado a identificar el ámbito del proyecto, las variables de control son identificadas posteriormente en Medición o iterativamente en Análisis.

MEASURE

Especificar CTQs, evaluar medidas, estimar capacidad de los procesos.

Diagrama Causa-Efecto

Representa gráficamente los factores que afectan a un problema de calidad con la finalidad de averiguar cuáles son las causas de un efecto.

En su forma más simple consiste en una flecha horizontal que apunta hacia un efecto y 4 o 6 flechas principales que se orientan hacia la flecha horizontal. Cada una de estas flechas corresponde a cada una de las categorías de causas que intervienen en el efecto y pueden incidir sobre ellas flechas secundarias relativas a causas de cada categoría.

Los pasos para su construcción son los siguientes:

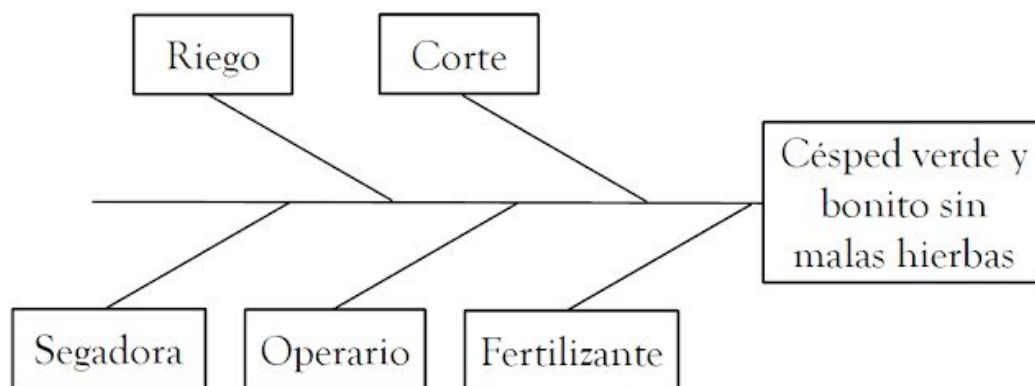
1. Hacer un diagrama en blanco



2. Escribir de forma precisa el efecto (o problema)



3. Escribir las categorías que se consideran apropiadas para el efecto



4. Realizar un “brainstorming” de posibles causas y relacionarlas con las categorías identificadas

[illegible]

3. Ponderar las salidas

[illegible]

4. Realizar una lista completa de variables de entrada al proceso

| | | | | | | |
|-----|------------------|-------------------------|--------------|---------------|-------------------|-------|
| | | Peso | 10 | 8 | 8 | |
| | | Nr. | 1 | 2 | 3 | |
| | | Salida | Color césped | Grosor césped | Sin malas hierbas | Total |
| Nr. | Paso del proceso | Entrada | | | | |
| 1 | Segar | Marca segadora | | | | |
| 2 | Segar | Altura hoja segadora | | | | |
| 3 | Segar | Frecuencia corte | | | | |
| 4 | Regar | Frecuencia regado | | | | |
| 5 | Regar | Duración regado | | | | |
| 6 | Fertilizar | Tipo fertilizante | | | | |
| 7 | Fertilizar | Frecuencia fertilizante | | | | |
| 8 | Todos | Experiencia operador | | | | |

5. Determinar el impacto de las entradas en las salidas

| | | | | | | |
|-----|------------------|-------------------------|--------------|---------------|-------------------|-------|
| | | Peso | 10 | 8 | 8 | |
| | | Nr. | 1 | 2 | 3 | |
| | | Salida | Color césped | Grosor césped | Sin malas hierbas | Total |
| Nr. | Paso del proceso | Entrada | | | | |
| 1 | Segar | Marca segadora | 1 | 4 | 4 | |
| 2 | Segar | Altura hoja segadora | 8 | 8 | 9 | |
| 3 | Segar | Frecuencia corte | 4 | 3 | 2 | |
| 4 | Regar | Frecuencia regado | 9 | 9 | 9 | |
| 5 | Regar | Duración regado | 8 | 8 | 8 | |
| 6 | Fertilizar | Tipo fertilizante | 10 | 10 | 10 | |
| 7 | Fertilizar | Frecuencia fertilizante | 5 | 3 | 4 | |
| 8 | Todos | Experiencia operador | 4 | 2 | 4 | |

6. Calcular el impacto total de cada entrada

| | | | | | | |
|-----|------------------|-------------------------|--------------|---------------|-------------------|-------|
| | | Peso | 10 | 8 | 8 | |
| | | Nr. | 1 | 2 | 3 | |
| | | Salida | Color césped | Grosor césped | Sin malas hierbas | Total |
| Nr. | Paso del proceso | Entrada | | | | |
| 1 | Segar | Marca segadora | 1 | 4 | 4 | 74 |
| 2 | Segar | Altura hoja segadora | 8 | 8 | 9 | 216 |
| 3 | Segar | Frecuencia corte | 4 | 3 | 2 | 80 |
| 4 | Regar | Frecuencia regado | 9 | 9 | 9 | 234 |
| 5 | Regar | Duración regado | 8 | 8 | 8 | 208 |
| 6 | Fertilizar | Tipo fertilizante | 10 | 10 | 10 | 260 |
| 7 | Fertilizar | Frecuencia fertilizante | 5 | 3 | 4 | 106 |
| 8 | Todos | Experiencia operador | 4 | 2 | 4 | 88 |

Diagrama de Pareto

Se parte de la matriz causa-efecto y se aplica el principio de pareto que dice que el 20% de los elementos factores son responsables del 70% del efecto.

Para ello se siguen los siguientes pasos:

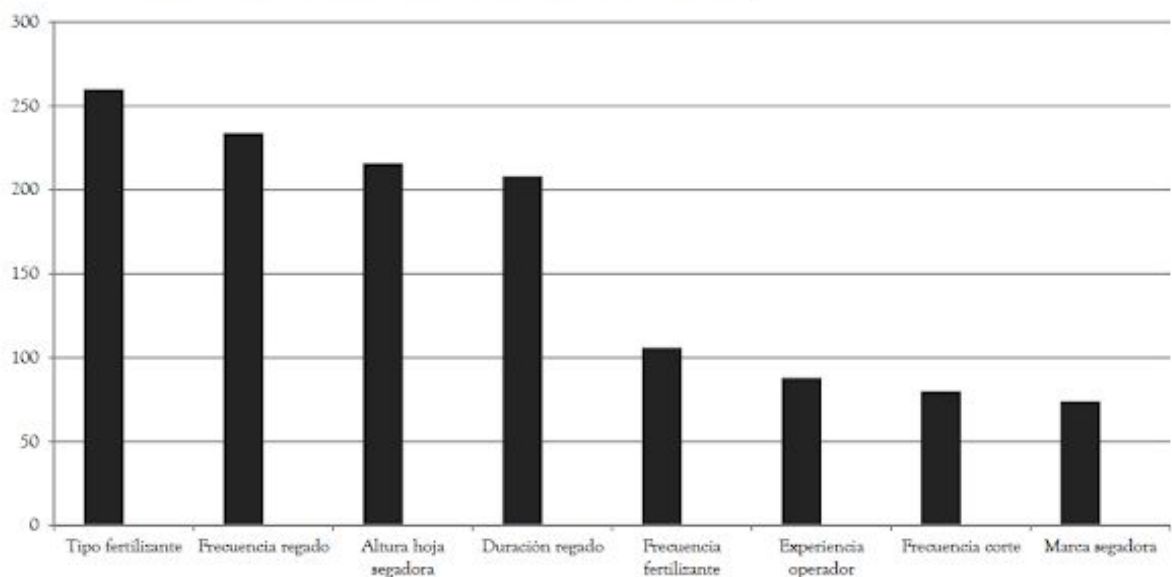
1. Ordenar las variables de entrada del proceso de la matriz causa-efecto

| Nr. | Entrada | Total |
|-----|-------------------------|-------------|
| 6 | Tipo fertilizante | 260 |
| 4 | Frecuencia regado | 234 |
| 2 | Altura hoja segadora | 216 |
| 5 | Duración regado | 208 |
| 7 | Frecuencia fertilizante | 106 |
| 8 | Experiencia operador | 88 |
| 3 | Frecuencia corte | 80 |
| 1 | Marca segadora | 74 |
| | Total | 1368 |

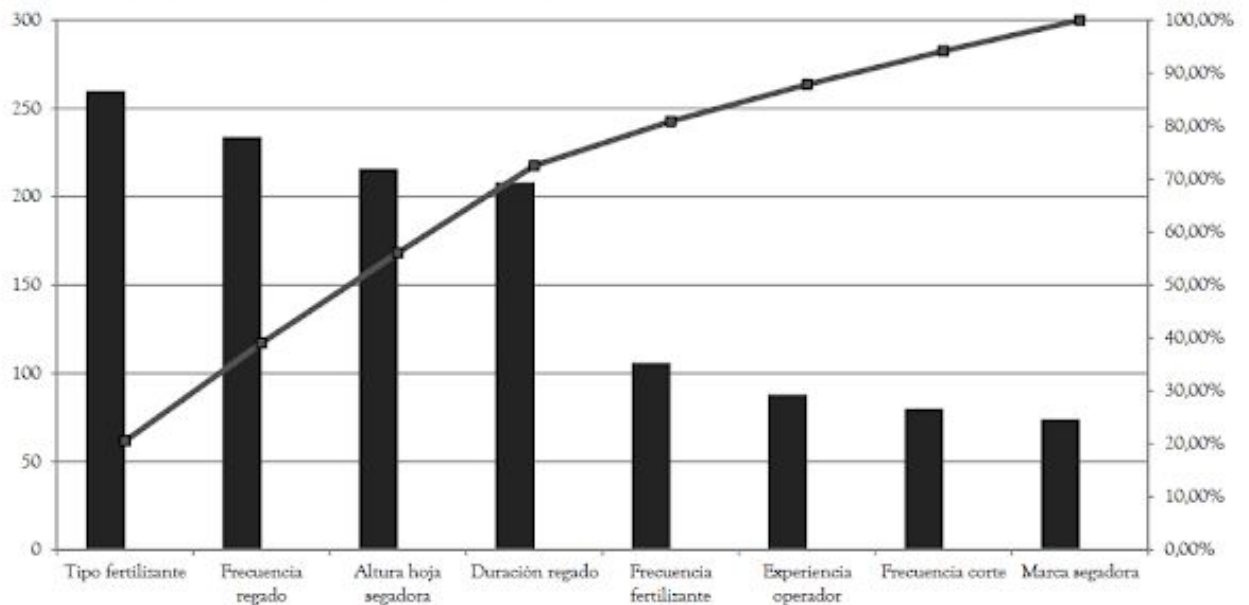
2. Calcular porcentaje y porcentaje acumulado para cada elemento

| Nr. | Entrada | Total | % | % Acumulado |
|-----|-------------------------|-------------|----------------|-------------|
| 6 | Tipo fertilizante | 260 | 20,54% | 20,54% |
| 4 | Frecuencia regado | 234 | 18,48% | 39,02% |
| 2 | Altura hoja segadora | 216 | 17,06% | 56,08% |
| 5 | Duración regado | 208 | 16,43% | 72,51% |
| 7 | Frecuencia fertilizante | 106 | 8,37% | 80,88% |
| 8 | Experiencia operador | 88 | 6,95% | 87,84% |
| 3 | Frecuencia corte | 80 | 6,32% | 94,15% |
| 1 | Marca segadora | 74 | 5,85% | 100,00% |
| | Total | 1368 | 100,00% | |

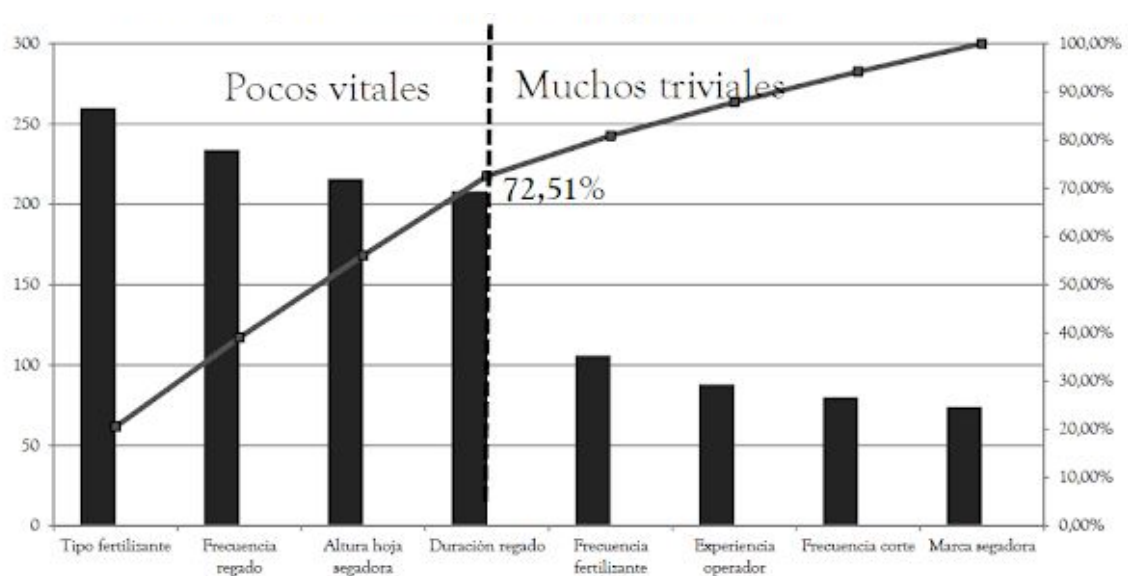
3. Dibujar gráfico de barra que represente el efecto de cada uno de los elementos contribuyentes



4. Realizar un gráfico lineal cuyos puntos representan el porcentaje acumulado de la table de Pareto



5. Señalar los elementos “pocos vitales” y “muchos triviales”, así como el porcentaje de corte.



Plan de Recogida de Datos

Debe incluir una breve descripción del proyecto, datos específicos a recoger, razones para recoger los datos, qué cosas nos van a permitir el entender los datos y qué se hará con los datos una vez recogidos.

Pasos

- 1) Previo a la recogida de datos
 - a) Definir claramente las metas y objetivos de la recogida de datos
 - b) Definir una metodología para la recogida (qué datos y cómo, alcance, tiempo, etc.).
 - c) Garantizar repetitividad, reproducibilidad, precisión y estabilidad de la recogida
- 2) Durante la recogida de datos
 - a) Seguir el proceso de recogida
- 3) Tras la recogida de datos
 - a) Hacer un seguimiento de los resultados

ANALYSE

Determinar las causas raíces de los defectos.

Escalas de Medida

- Nominal: mera clasificación. Los valores asignados a los objetos no tienen significado cuantitativo ni cualitativo. Son clases de equivalencia de una clasificación. Moda y percentiles.
- Ordinal: relaciones de comparación disfrazadas de asignaciones numéricas. Los valores asignados a los objetos no tienen significado cuantitativo. Actúan como marcas que indican el orden de los objetos. Máximo, mínimo, mediana y percentiles.
- Intervalo: representan valores numéricos. La diferencia entre cada par consecutivo de números es una cantidad equivalente. No hay cero real. Dos unidades no son el doble de una unidad. Media y desviación típica.
- Razón: igual que intervalo que en este caso dos unidades sí que son el doble de una unidad y existe cero absoluto. Media y desviación típica.

Estadísticos Descriptivos

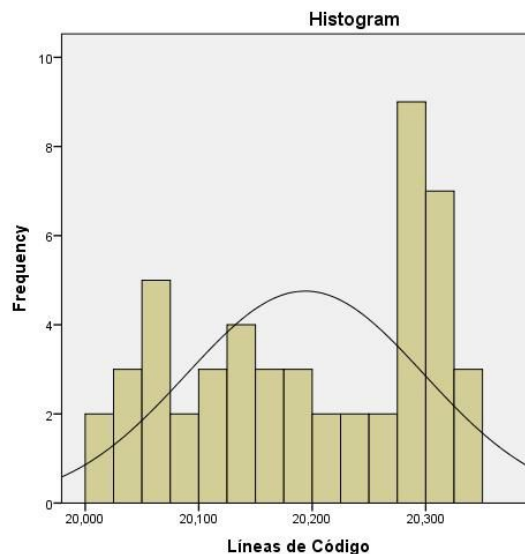
Describen de forma cuantitativa las características principales de un conjunto de datos. El objetivo es resumir y se agrupan en medidas de centralidad y de dispersión.

Para medir la centralidad se recurre a medidas como la media, la mediana y la moda.

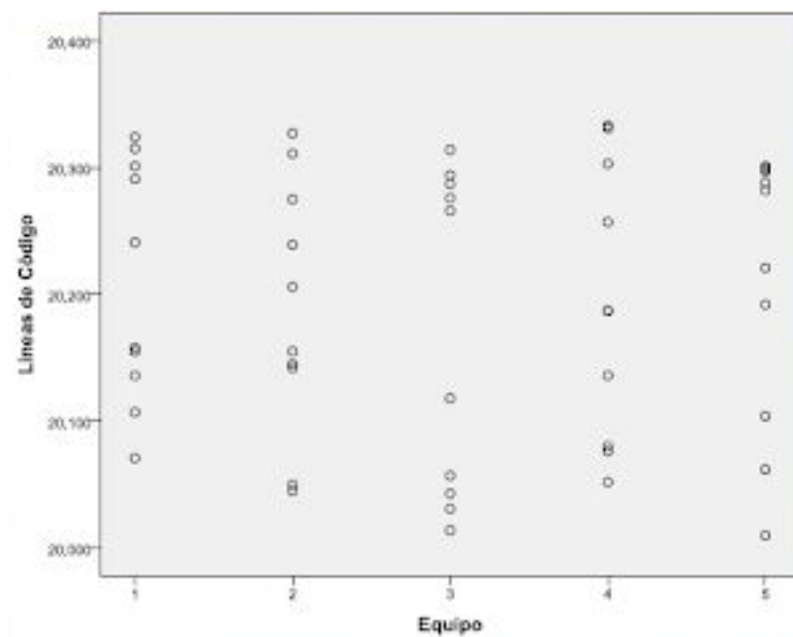
Para medir la dispersión se recurre a medidas como la varianza, la desviación típica, el mínimo y máximo, la curtosis y la asimetría.

Diagramas básicos

- Histograma: representación gráfica en forma de barras. La altura de cada una corresponde con la frecuencia de los valores representados. Se puede cotejar contra una curva normal.

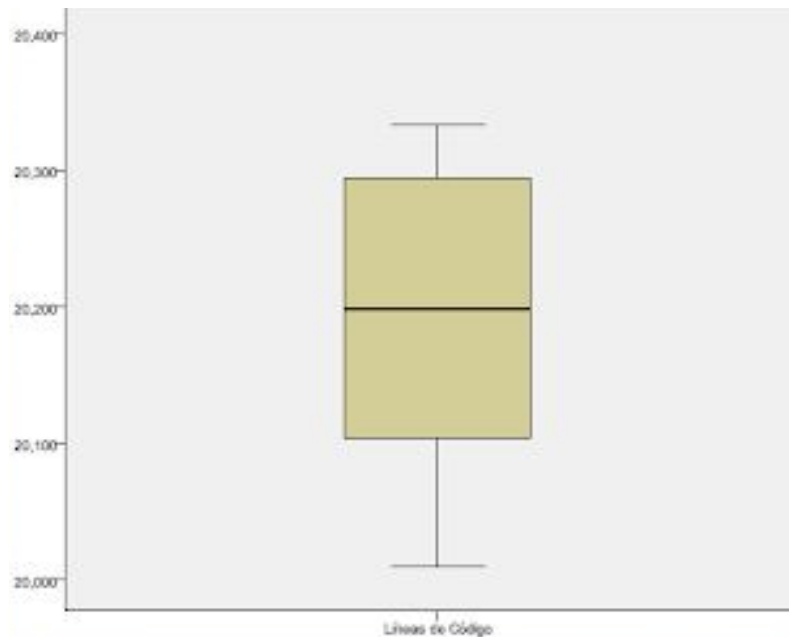


- Diagrama de dispersión: utiliza las coordenadas cartesianas para mostrar los valores de dos variables para un conjunto de datos. Los datos se muestran como un conjunto de puntos.

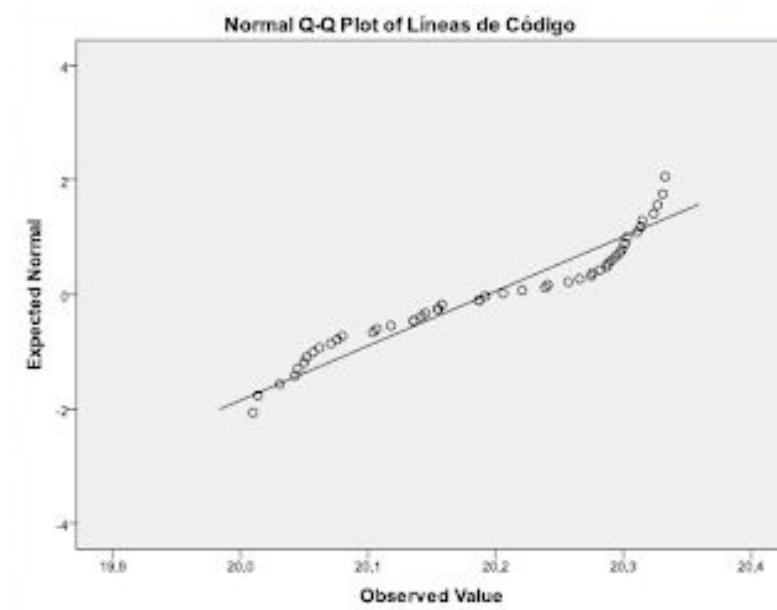


- Diagrama de caja y bigote: compuesto por un rectángulo (caja) y 2 brazos (bigote). Los bigotes medirán el mínimo y el máximo mientras que los bordes de la caja

representan Q1 y Q3 y la línea dentro de ella la mediana (Q2). Los valores atípicos se representan como círculos.



- Gráfico probabilidad normal: caso particular de gráfico de probabilidad. Técnica gráfica para contrastar la normalidad de un conjunto de datos. Permite comparar la distribución de la muestra contra la distribución normal. Si los datos son normales, los puntos quedarán cerca de la línea recta. Es normal una cierta separación en los extremos.



Modelo Lineal General (MLG) Univariante

Proporciona análisis para una variable dependiente, mediante uno o más factores de: regresión y/o varianza. Las variables factor dividen la población en grupos.

Se pueden contrastar los efectos de otras variables en una única variable dependiente.

Se realiza siguiendo los siguientes pasos:

1) Identificación del modelo matemático

Variable dependiente (o dependientes) bajo estudio y factores (variables independientes) sobre los que queremos estudiar el efecto que tienen en la variable dependiente.

Por ejemplo una variable bajo estudio podría ser las líneas de código y las variables independientes serían el equipo de desarrollo y el día.

2) Validación del modelo

Se realizará un análisis respecto a la normalidad y homocedasticidad de los datos (error cometido por el modelo tiene siempre la misma varianza).

3) Cálculo de la significación estadística de los factores

4) Cálculo del comportamiento de los niveles de los factores significativos

Proceso de Control Estadístico

Propuesto originalmente para mejorar los procesos de fabricación, permite determinar si un proceso es estable, diferenciando si las variaciones en el proceso son comunes o puntuales; y si es capaz de satisfacer los objetivos de negocio.

La estabilidad se mide a través de gráficos de control mientras que la capacidad será relegada a la fase de CONTROL.

Gráfico de Control

Poseen una línea central (CL) y límites de control (UCL y LCL). Dichos valores se obtienen a través de un conjunto de observaciones de dicho proceso y en ningún caso pueden ser establecidas arbitrariamente.

En general los datos a analizar pueden ser de dos tipos:

- Datos de variables: expresan una medida dimensional, una medida que se refiere a un conjunto en vez de a una parte. Un dato de variable no necesita ser contextualizado o delimitado, tiene significado por sí mismo.
- Datos de atributo: tiene un origen distinto y se usan para diferentes ámbitos. Se utilizan para recoger información acerca del cumplimiento de un producto respecto a los criterios establecidos. Dado un dato de atributo, se puede considerar su área de oportunidad como el rango de interpretación de éste. Si dos datos tienen un área de oportunidad distinto habrá que convertir cada uno de ellos a una medida común para poder compararlos (por ejemplo %).

Estos datos podrán ser procesados de dos formas: individualmente o por grupos. El primer caso es aconsejable cuando se posee pocos datos de muestra o cuando se quiere realizar un estudio más exhaustivo en la fase de monitorización. En el segundo caso los datos son agrupados en grupos sintetizados por variables estadísticas como la media, la mediana, el range, etc. Es aconsejable procesar los datos por grupos cuando naturalmente guardan relación por el periodo de observación o por el tipo de muestra.

Según el tipo de datos y el número de grupos del conjunto a analizar se utilizarán los siguientes tipos de gráficos de control:

- Datos variables
 - XmR chart (n = 1)
 - X-bar and R charts (1 <= n <= 10)
 - X-bar and S charts (n > 10)
- Datos de atributo
 - XmR chart tiene menos requisitos y es la opción preferida
 - C-charts y P-Charts tienen mayor precisión cuando los datos siguen una distribución de poisson y una distribución binomial.

XmR chart (individual and moving range chart)

Son gráficos para monitorizar procesos en los cuales cada punto representa un único valor de medida bajo estudio.

En realidad son dos gráficos separados (X y mR) pero siempre se utilizan juntos para identificar el punto en el que proceso ya no está bajo control estadístico.

- Gráfico X: usa la media de los puntos para generar un indicador de tendencia.

$$CLx = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1..m} x_i$$

- Gráfico mR: usa la media del rango de valores de las observaciones para determinar la dispersión del conjunto.

$$CLmR = \frac{1}{m-1} \cdot \sum_{i=2..m} |x_i - x_{i-1}|$$

$$UCLx = CLx + 3sigma = CLx + 2.66 \cdot mR$$

$$LCLx = CLx - 3sigma = CLx - 2.66 \cdot mR$$

$$UCLmR = mR * D_4$$

$$LCLmR = mR * D_3$$

X-bar y R chart

Es el mismo gráfico que el anterior salvo que en vez del gráfico mR se usa el R.

- Gráfico R: toma la media de cada grupo para determinar la dispersión.

$$CLr = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1..n} \left| \max(x_i) - \min(x_i) \right|$$

(donde xi recordemos es un conjuntos de datos)

$$UCLx = CLr + 3sigma = X + A_2 \cdot R$$

$$LCLx = CLr - 3sigma = X - A_2 \cdot R$$

$$UCLR = D_4 \cdot R$$

X-bar y S chart

Mismo gráfico que anteriores pero ahora se usa el S.

- Gráfico S: toma la media de las desviaciones estándar de cada subgrupo para medir dispersión.

$$S = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1..n} \sqrt{\frac{\sum_{j=1..k} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{k-1}}$$

$$UCLX = CLS + 3sigma = X + A_3 \cdot S$$

$$LCLX = CLS - 3sigma = X - A_3 \cdot S$$

$$LCLS = B_3 \cdot S$$

$$UCLS = B_4 \cdot S$$

Detección de anomalías

Todos los procesos se ven afectados por variaciones random (ruido) y no random (factores). Habrá que saber identificar aquellas variaciones no random que sean falsos positivos (ruido) y que sean variaciones ocasionales.

Para ello habrá 3 tipos de tests basados en las [8 reglas de Nelson](#):

- Sigma tests

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Un punto está alejado de más de 3-sigmas de la media | Un problema puntual |
| 5 | Dos (o tres) puntos por cada 3 puntos seguidos están a más de 2-sigma de la media en la misma dirección | Algo está incrementando la variabilidad del proceso. Primer aviso. |
| 6 | 4 (o 5) de cada 5 puntos seguidos están a más de 1-sigma de la media en la misma dirección | Hay una fuerte tendencia de las muestras hacia el estado de fuera de control. |

- Limit tests

| | | |
|---|--|---|
| 2 | 7, 8 o 9 observaciones consecutivas están por encima o por debajo (todas ellas igual) de la CL. | Algo está haciendo que el proceso se aparta de la CL. ¿Nueva CL? Primer aviso. |
| 8 | 8 puntos seguidos a ambos lados de la media pero ninguno a menos de 1-sigma de distancia de ella | Muestras de diferentes subprocesos están siendo combinados haciendo que el resultado sea falsamente estable (por ejemplo una máquina rápida con una lenta). |
| 7 | 15 puntos en menos distancia que 1-sigma | Se podría esperar mayor variabilidad |

- Trend tests

| | | |
|---|--|--|
| 4 | 14 puntos seguidos incrementan y decremantan quedando a ambos lados de la CL | Los datos se están obteniendo alternativamente de diferentes subprocesos. |
| 3 | 6 o más puntos están constantemente incrementando o decremantando | Existe tendencia. El proceso está evolucionando a una nueva CL (para mejor o peor) o se está descontrolando. |

Todas estas reglas pueden aparecer a la vez, y la aparición de rasgos de cierta de ellas no implica que realmente esté sucediendo (falsos positivos). En todo caso se mide la capacidad de los procesos, no la estabilidad.

IMPROVE

Implementar los cambios para mejorar el rendimiento de los procesos.

El diseño y análisis de experimentos se basa en 3 principios:

- **Control local** de las condiciones bajo las que ocurre el experimento para reducir el error experimental.
- **Replicación**, como medio de estimar la varianza del error experimental.
- **Aleatorización**

Mientras que en la fase Analyze se desconocía la relación entre los datos pero se podían describir alguno patrones de comportamiento (**relaciones descriptivas**), en la fase Improve se obtendrán relaciones y causas claras (**relaciones casuales**). Por ejemplo “Si A y B son las causas de la variación de C, esto significa que C sólo variará si lo hacen A ó B”.

En esta fase nos concentramos en experimentos corporativos, estos implican establecer dos o más circunstancias y comparar las respuestas a cada una de ellas.

Experimento: investigación que establece un conjunto particular de circunstancias bajo un protocolo específico para observar y evaluar las implicaciones de las observaciones realizadas.

Tratamiento: conjuntos de circunstancias creadas para el experimento, y que son el centro de la investigación. En un ejemplo comparativo habrá pues dos o más tratamientos y se comparan sus efectos en los sujetos bajo estudio.

Unidad experimental: entidad física o sujeto utilizado para llevar a cabo el experimento. Se expone a las distintas circunstancias de forma independiente a otras unidades.

Error experimental: describe la variación entre unidades experimentales tratadas de forma idéntica e independiente. Algunas fuentes de error comunes son la variación natural, variabilidad en la medida, incapacidad de reproducir las condiciones de forma exacta o la interacción entre tratamientos y unidades.

Sujeto experimental: persona que aplica los métodos o técnicas a la unidad experimental.

Variable de contexto: cada característica (cualitativa o cuantitativa) de la unidad experimental.

Variable de respuesta: los datos que se van a medir en cada experimento. También denominadas variables dependientes.

Factores: son las variables que afectan a la variable respuesta y cuyo impacto es de interés para el estudio. También denominados variables independientes. Los valores de los factores varían durante la experimentación, mientras que los valores de las variables de contexto son constantes.

Niveles: valores de las variables independientes (factores). También denominados tratamientos.

Interacción: dos factores A y B interaccionan si el efecto de uno depende del valor del otro.

Variable de bloque: variaciones no deseadas entre experimentos.

Replicación interna: repetición de todos o algunos de los experimentos unitarios. Incrementa la fiabilidad de la experimentación.

Replicación externa: llevada a cabo por otros investigadores en otro contexto. Los proyectos de desarrollo deben ser idénticos (algo complicado en proyectos de software).

Etapas

1. Planificación y definición → Hipótesis a probar
2. Diseño → Diseño experimental
3. Ejecución → Datos experimentales
4. Análisis e interpretación → Hipótesis refinada

CONTROL

Desarrollar un sistema para mantener las ganancias. Documentar el proceso mejorado asegurando que el proceso es monitorizado y gestionado adecuadamente.

Se puede documentar mediante un diagrama SIPOC o mecanismo similar. En cualquier caso el equipo six-sigma ya no intervendrá en el proceso mejorado y por lo tanto es fundamental dejarlo todo bien documentado para que el proceso mejorado se aplique de forma estandarizada.

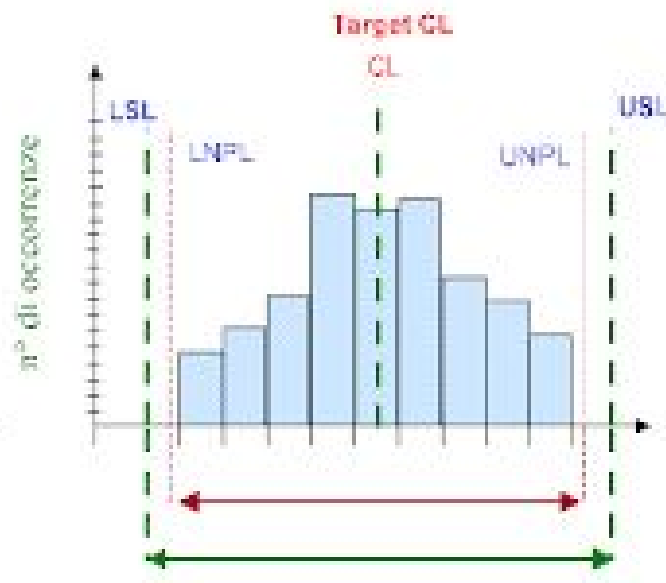
Además de documentar se monitoriza el rendimiento del proceso a través del tiempo para asegurar que sus resultados siguen cumpliendo los objetivos marcados. La monitorización incluye **medición, evaluación de la estabilidad** (control charts) y **evaluación de la capacidad** (capability histograms).

Ya sea como parte del plan de monitorización o gestión, o como documento aparte, debe existir un plan de respuesta que describa qué acciones deben llevarse a cabo en casos de problemas de estabilidad o problemas de capacidad, quién debe tomar las decisiones y qué soportes existen para resolver el problema.

Capability Histograms

Determinan si el proceso es capaz de satisfacer los objetivos del negocio comparando los resultados observados con los esperados.

Los histogramas de capacidad tiene una línea central (CL) así como líneas que marcan el límite del proceso (LNPL y UNPL). Estas tres líneas son obtenidas a partir de datos reales y describen el rendimiento del proceso.



Estas líneas serán comparadas a posteriori con las esperadas (LSL, TCL y USL) para determinar si el proceso tiene un rendimiento correcto (son determinadas por los clientes).

Otras formas de determinar la capacidad de un proceso son:

Fraction nonconforming

Manera de cuantificar en qué términos el proceso en cuestión no cumple los requisitos fijados. Consiste en un ratio entre las observaciones que pasan los límites especificados y las observaciones totales.

Specification tolerances

El intervalo de tolerancia viene representado por $USL - LSL$, y éste deberá ser de un ancho mayor o igual a 6-sigma.

Distance to Nearest Specification

Sirve para evaluar cuánto de centrado es el proceso. Para ello se calcula

$$ZU = \frac{USL - CL}{\sigma}$$

$$ZL = \frac{CL - LSL}{\sigma}$$

La diferencia con CL en ambos casos debe ser mayor o igual a 3-sigma y en un proceso capaz deben ser ZU y ZL positivos.

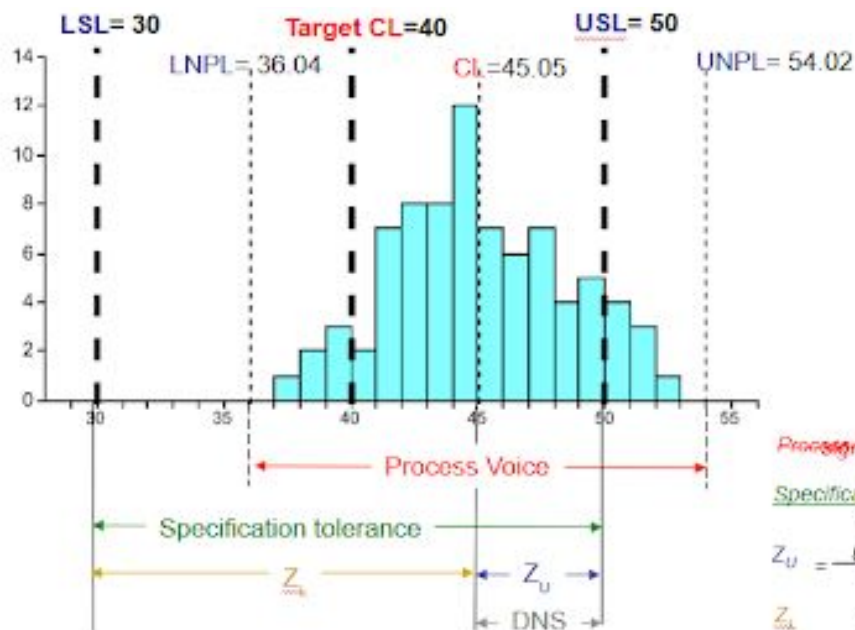
La Distance to Nearest Specification (DNS) será el mínimo de ZU y ZL. En un proceso capaz DNS satisfecerá en unidades sigma

$$3 \leq DNS \leq \text{Intervalo de tolerancia}$$

$$\sigma = \frac{UCL - CL}{3}$$

$$\sigma = \frac{CL - LCL}{3}$$

$$\sigma = \frac{mR}{d_2}$$



$$\sigma = \frac{\overline{mR}}{d_2} = \frac{3.38}{1.126} = 3$$

$$\text{Process Voice} = \frac{UNPL - LNPL}{\sigma} = \frac{54.02 - 36.04}{3} = 6$$

$$\text{Specification Tolerance} = \frac{USL - LSL}{\sigma} = \frac{20}{3} = 6.66$$

$$Z_U = \frac{USL - CL}{\sigma} = \frac{50 - 45.05}{3} = \frac{4.95}{3} = 1.65$$

$$Z_L = \frac{CL - LSL}{\sigma} = \frac{45.05 - 30}{3} = \frac{15.05}{3} = 5.02$$

$$DNS = \min(Z_U, Z_L) = Z_U = 1.65$$

$$mR = \frac{|43.5-50.5| + |45.5-43.5| + |39.8-45.5| + \dots + |41-42|}{79} = 3.38$$

Average: $\bar{X} = 45.03$

| Weeks | Monday | Tuesday | Wednesday | Friday | |
|-------|--------|---------|-----------|--------|------|
| 1 | 50.5 | 43.5 | 45.5 | 39.8 | 42.9 |
| 2 | 44.3 | 44.9 | 42.9 | 39.8 | 39.3 |
| 3 | 48.8 | 51.0 | 44.3 | 43.0 | 51.3 |
| 4 | 46.3 | 45.2 | 48.1 | 45.7 | 44.1 |
| 5 | 40.6 | 45.7 | 51.9 | 47.3 | 46.4 |
| 6 | 44.4 | 49.0 | 47.9 | 45.5 | 44.8 |
| 7 | 46.0 | 41.1 | 44.1 | 41.8 | 47.9 |
| 8 | 44.9 | 43.4 | 49.0 | 49.5 | 47.4 |
| 9 | 50.0 | 49.0 | 42.6 | 41.7 | 38.5 |
| 10 | 44.5 | 46.5 | 41.7 | 42.6 | 41.7 |
| 11 | 43.8 | 41.8 | 45.5 | 44.5 | 38.6 |
| 12 | 37.2 | 43.8 | 44.8 | 43.5 | 40.9 |
| 13 | 50.0 | 43.4 | 48.3 | 46.4 | 43.4 |
| 14 | 52.3 | 45.2 | 42.2 | 44.8 | 42.8 |
| 15 | 50.0 | 46.2 | 47.4 | 42.2 | 47.0 |
| 16 | 47.3 | 49.7 | 48.0 | 42.0 | 41.0 |

centra line...

$$\bar{X} = 45.03$$

$$mR = 3.38$$

$$\sigma = \frac{mR}{d_2} = \frac{3.38}{1.128} = 3$$

$$D_4 = 3.268$$

$$UNPL_x = \bar{X} + 2.66 * mR = 45.03 + 2.266 * 3.38 = 54.02$$

$$CL_x = 45.03$$

$$LNPL_x = \bar{X} - 2.66 * mR = 45.03 - 2.66 * 3.38 = 36.04$$

$$UCL_R = D_4 * mR = 3.268 * (3.38) = 11.03$$

$$CL_R = 3.38$$

| n | A ₂ | D ₃ | D ₄ |
|----|----------------|----------------|----------------|
| 2 | 1.880 | — | 3.268 |
| 3 | 1.023 | — | 2.574 |
| 4 | 0.729 | — | 2.282 |
| 5 | 0.577 | — | 2.114 |
| 6 | 0.483 | — | 2.004 |
| 7 | 0.419 | 0.076 | 1.924 |
| 8 | 0.373 | 0.136 | 1.864 |
| 9 | 0.337 | 0.184 | 1.816 |
| 10 | 0.308 | 0.223 | 1.777 |

| subgroup size n | d ₂ |
|-----------------|----------------|
| 2 | 1.128 |
| 3 | 1.693 |
| 4 | 2.059 |
| 5 | 2.326 |
| 6 | 2.534 |
| 7 | 2.704 |
| 8 | 2.847 |
| 9 | 2.970 |
| 10 | 3.078 |